Sur quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisées.

Par T. Peyovitch (Beograd)

(Reçu le premier avril, 1956)

Soit $f(x)$ une fonction intégrable pour $x \geqq a$, $\varphi(x)$ une fonction satisfaisant à la condition $\varphi(x) \to \infty$, pour $x \to \infty$ et admet la dérivée positive $\varphi'(x)$ et intégrable, pour $x \geqq a$.

Nous allons démontrer les théorèmes suivants :

A. *Si l'on a*

$$(1) \qquad \int_x^\infty f(t)dt = o(1), \quad pour\ x \to \infty ,$$

on aura (k *constante positive*)

$$(2) \qquad \varphi^k(x) \int_x^\infty \frac{f(t)}{\varphi^k(t)} dt = o(1), \quad pour\ x \to \infty ,$$

$$(3) \qquad \int_x^\infty \varphi^{k-1}(x)\varphi'(x)dx \int_x^\infty \frac{f(t)}{\varphi^k(t)}\, dt = o(1), \quad pour\ x \to \infty .$$

Pour démontrer la formule (2) sous la condition (1), faisons l'intégration par parties[1)]

$$\int_x^\infty \frac{f(t)}{\varphi^k(t)} dt = \frac{1}{\varphi^k(x)} \int_x^\infty f(t)dt - k \int_x^\infty \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi^{k+1}(x)} \int_x^\infty f(t)dt$$

d'où l'on a

$$(4) \qquad \varphi^k(x) \int_x^\infty \frac{f(t)}{\varphi^k(t)} dt = \int_x^\infty f(t)dt - k\varphi^k(x) \int_x^\infty \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi^{k+1}(x)} \int_x^\infty f(t)dt .$$

Il est évident que la condition (1) entraîne la relation

$$\varphi^k(x) \int_x^\infty \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi^{k+1}(x)} \int_x^\infty f(t)dt = o(1), \quad \text{pour } x \to \infty ,$$

ce qui, d'après (4), démontre la formule (2).[2)]

Pour démontrer la formule (3), il faut considérer l'égalité[3)]

---

1) En posant $u = \frac{1}{\varphi^k(t)}$, $du = \frac{-k\varphi'(t)dt}{\varphi^{k+1}(t)}$, $dv = f(t)dt$, $v = -\int_x^\infty f(t)dt$.

2) Il faut remarquer que la relation (2) peut être démontrée par la seconde formule de la moyenne.

3) En posant $u = \int_x^\infty \frac{f(t)dt}{\varphi^k(t)}$, $du = -\frac{f(x)dx}{\varphi^k(x)}$, $dv = \varphi^{k-1}(x)\varphi'(x)dx$, $v = \frac{\varphi^k(x)}{k}$.

$$\int_x^\infty \varphi^{k-1}(x)\varphi'(x)dx\int_x^\infty \frac{f(t)dt}{\varphi^k(t)}=\left[\frac{\varphi^k(x)}{k}\int_x^\infty\frac{f(t)dt}{\varphi^k(t)}\right]_x^\infty+\frac{1}{k}\int_x^\infty f(t)dt\,.$$

L'équation ci-dessus, d'après (1) et (2), démontre la formule (3).

B. *Si l'on a*

$$\int_x^\infty \varphi^k(t)f(t)dt=o(1)\,,\ \textit{pour}\ x\to\infty\,,$$

on aura

$$\varphi^k(x)\int_x^\infty f(t)dt=o(1),\ \textit{pour}\ x\to\infty\,, \tag{5}$$

$$\int_x^\infty \varphi^{k-1}(x)\varphi'(x)dx\int_x^\infty f(t)dt=o(1),\ \textit{pour}\ x\to\infty\,. \tag{6}$$

Ce théoreme résulte du théorème A, car les relations (5) et (6) peuvent être écrites sous la forme

$$\varphi^k(x)\int_x^\infty f(t)dt=\varphi^k(x)\int_x^\infty\frac{\varphi^k(t)f(t)}{\varphi^k(t)}dt=o(1),\ \text{pour}\ x\to\infty\,,$$

$$\int_x^\infty \varphi^{k-1}(x)\varphi'(x)dx\int_x^\infty f(t)dt=\int_x^\infty\varphi^{k-1}(x)\varphi'(x)dx\int_x^\infty\frac{\varphi^k(t)f(t)dt}{\varphi^k(t)}$$
$$=o(1)\,,\ \text{pour}\ x\to\infty\,,$$

auxquelles il faut appliquer la démonstration du théorème A. Pour $\varphi(x)=x$ le théorème B se ramène au théorème de M. Hukuhara[4)].

C. *Si l'on a*

$$\int_x^\infty \varphi^{kn-k}(t)f(t)dt=o(1)\,,\ \textit{pour}\ x\to\infty\,, \tag{7}$$

on aura

$$\int_x^\infty [\varphi^k(t)-\varphi^k(x)]^{n-1}f(t)dt=o(1)\,,\ \textit{pour}\ x\to\infty\,, \tag{8}$$

$$\underbrace{\int_x^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-1})\varphi'(x_{n-1})dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-2})\varphi'(x_{n-2})dx_{n-2}\cdots\int_{x_1}^\infty f(t)dt}_{n} \tag{9}$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty[\varphi^k(t)-\varphi^k(x)]^{n-1}f(t)dt\,,$$

4) M. HUKUHARA, Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires; domaine réel, p. 72. (Journal of the Faculty of Science, Hokkaiko Imperial University, Serie I, Vol. II, Nos. 1-2, January 1934, Sapporo, Japan).

n étant un nombre entier positif.

En écrivant l'intégrale (8) sous la forme

$$\int_x^\infty [\varphi^k(t)-\varphi^k(x)]^{n-1} f(t)dt = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \varphi^{kp}(x) \int_x^\infty \varphi^{kn-k-kp}(t) f(t)dt\,,$$

on aura, sous la condition (7) et d'après le théorème A,

$$\varphi^{kp}(x)\int_x^\infty \varphi^{kn-k-kp}(t)f(t)dt = o(1)\,,\ \text{pour}\ x\to\infty\,,$$

ce qui démontre la formule (8).

Pour démontrer la validité de la formule (9), sous la condition (7), supposons qu'elle est vraie pour $n-1\geqq 1$, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$(10)\quad \underbrace{\int_x^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-2})\varphi'(x_{n-2})dx_{n-2}\int_{x_{n-2}}^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-3})\varphi'(x_{n-3})dx_{n-3}\cdots\int_{x_1}^\infty f(t)dt}_{n-1}$$
$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_x^\infty [\varphi^k(t)-\varphi^k(x)]^{n-2} f(t)dt$$
$$=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{p=0}^{n-2}(-1)^p\binom{n-2}{p}\varphi^{kp}(x)\int_x^\infty \varphi^{kn-2k-kp}(t)f(t)dt\,.$$

Si l'on multiple l'équation ci-dessus par $k\varphi^{k-1}(x)\varphi'(x)dx$ et intégre, on aura[5)]

$$\underbrace{\int_x^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-1})\varphi'(x_{n-1})dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-2})\varphi'(x_{n-2})dx_{n-2}\cdots\int_{x_1}^\infty f(t)dt}_{n}$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{p=0}^{n-2}(-1)^{p+1}\binom{n-1}{p+1}\varphi^{kp+k}(x)\int_x^\infty \varphi^{kn-2k-kp}(t)f(t)dt$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{p=0}^{n-2}(-1)^p\binom{n-1}{p+1}\int_x^\infty \varphi^{kn-k}(t)f(t)dt\,.$$

Si l'on pose $p+1=m$, la dernière équation devient

$$\int_x^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-1})\varphi'(x_{n-1})dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-2})\varphi'(x_{n-2})dx_{n-2}\cdots\int_{x_1}^\infty f(t)dt$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\binom{n-1}{m}\varphi^{km}(x)\int_x^\infty \varphi^{kn-k-km}(t)f(t)dt$$

---

5) En intégrant par parties le second membre de l'identité (10), posant

$$u=\int_x^\infty \varphi^{kn-2k-kp}(t)f(t)dt,\quad du=-\varphi^{kn-2k-kp}(x)f(x)dx,$$
$$lv=k\varphi^{kp+k-1}(x)\varphi'(x)dx,\quad v=\frac{\varphi^{kp+k}(x)}{p+1}\,.$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{m-1}\binom{n-1}{m}\int_x^\infty \varphi^{kn-k}(t)f(t)dt$$

ou[6])

$$\int_x^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-1})\varphi'(x_{n-1})dx_{n-1}\int_x^\infty k\varphi^{k-1}(x_{n-2})\varphi'(x_{n-2})dx_{n-2}\cdots\int_{x_1}^\infty f(t)dt$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty[\varphi^k(t)-\varphi^k(x)]^{n-1}f(t)dt\,,$$

ce qui démontre la validité de la formule (9).

Pour $\varphi^k(x)=x$, on obtient la formule (a). Si l'on pose $x=0$, $f(t)=e^{-t}$, la formule (a) donne

$$\int_0^\infty dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^\infty dx_{n-2}\cdots\int_{x_1}^\infty e^{-t}dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt=\frac{\Gamma(n)}{(n-1)!}=1\,,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt=(n-1)!\underbrace{\int_0^\infty dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^\infty dx_{n-2}\cdots\int_{x_1}^\infty}_{n} e^{-t}dt\,.$$

6) Car on a

$$\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{m-1}\binom{n-1}{m}=\binom{n-1}{1}-\binom{n-2}{2}+\cdots+(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-1}=1\,.$$

Voir mon article: Contribution à l'étude de la formule

(a) $$\underbrace{\int_x^\infty dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^\infty dx_{n-2}\cdots\int_{x_1}^\infty}_{n} f(t)dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty(t-x)^{n-1}f(t)dt\,.$$

(Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. De Serbie, t. IV, No. 3-4, 1953, Beograd, Yougoslavie).